TD 1 : PROBABILITÉS ET MARTINGALES

Ex. 1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoire telles que $X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ avec $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \in \mathbb{R}_+$. Supposons que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} X$.

(a) Montrer qu'il existe $\sigma \in [0,\infty)$ tel que $\sigma_n \xrightarrow{n\to\infty} \sigma$.
(astuce : fonction caractéristique).

(b) Montrer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (considérer la fonction $f(x) = e^{-|x|}$).

(c) En déduire que μ_n converge vers un nombre réel μ.

(d) Conclure que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

(e) Montrer que s'ils existent $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in [0,\infty)$ tels que $\sigma_n \xrightarrow{n\to\infty} \sigma$ et $\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \mu$, alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Ex. 2 (a) Soient X, Z deux variables aléatoires et soit $f_{X,Z}(x,z)$ la densité conjointe du vecteur (X,Z). Soit

$$f_{X|Z}(x|z) := \begin{cases} \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} & \text{si } f_Z(z) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où $f_Z(z)$ est la densité de Z. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\big[|h(X)|\big] < \infty$. On définit

$$g(z) := \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X|Z}(x|z)\mathrm{d}x.$$

En utilisant la définition d'espérance conditionnelle montrer que $g(Z) \overset{p.s.}{=} \mathbb{E}\big[h(X) \,\big|\, Z\big]$.

(b) Soient $X_1, \ldots, X_n$ variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \Lambda_i$, où Λ_i est une loi donnée. Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit

$$\gamma^h(x) := \mathbb{E}\Big[h(x, X_2, \ldots, X_n)\Big].$$

En utilisant la définition d'espérance conditionnelle montrer que

$$\gamma^h(X_1) \overset{p.s.}{=} \mathbb{E}\Big[h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \,\Big|\, X_1\Big].$$

Ex. 3 Soit $X_1, X_2, \cdots$ une suite de variables aléatoires IID, $X_i \sim \Lambda$, où Λ est une loi donnée. On définit $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et $\mathcal{G}_n := \sigma(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \cdots)$.

(a) $\mathcal{G}_n$ est-t-elle une filtration ?

(b) Montrer que pour $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$ on a que $\mathbb{E}\big[X_i \,\big|\, \mathcal{G}_n\big] = \mathbb{E}\big[X_i \,\big|\, S_n\big]$ et en déduire que $\mathbb{E}\big[X_i \,\big|\, \mathcal{G}_n\big] = \mathbb{E}\big[X_1 \,\big|\, \mathcal{G}_n\big]$.

(c) En déduire que $\mathbb{E}\big[X_1 \,\big|\, \mathcal{G}_n\big] = \frac{1}{n} S_n$.

Ex. 4 (a) Supposons que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n$. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}\Big(T \leqslant n + N \,\Big|\, \mathcal{F}_n\Big) \geqslant \epsilon,\ p.s.$$

Montrer par récurrence que pour tout $k = 1, 2, 3, \ldots$ on a que $\mathbb{P}\big(T > kN\big) \leqslant (1-\epsilon)^k$. En déduire que $\mathbb{E}\big[T\big] < \infty$.

(b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d. tel que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_1 = -1) = q := 1 - p, \quad p \in (0,1).$$

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, avec $0 < a < b$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On définit

$$T_{(a,b)} := \inf\Big\{n \in \mathbb{N}\colon S_n = -a \quad \text{ou} \quad S_n = b\Big\}.$$

Montrer que $T_{(a,b)}$ est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et qu'il satisfait les hypothèses du point (a). En déduire que $\mathbb{E}\big[T_{(a,b)}\big] < \infty$.

(astuce : $\{X_{n+1} = 1, \ldots, X_{n+b+a} = 1\} \cap \{T_{(a,b)} \geqslant n\} \subseteq \{T_{(a,b)} \leqslant n + b + a\} \cap \{T_{(a,b)} \geqslant n\}$).

(c) Soit $M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ et $N_n = S_n - n(p-q)$. Montrer que $N = (N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des martingales et en déduire $\mathbb{E}\Big[S_{T_{(a,b)}}\Big]$ et $\mathbb{P}(S_{T_{(a,b)}} = -a)$.

(astuce : considérer séparément les cas $q = p$ et $q \neq p$).