TD 2 : Mouvement Brownien

Ex. 1 Montrer que $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ est un Mouvement Brownien si et seulement si B est un processus Gaussien à trajectoires p.s. continues, espérance nulle et $Cov(B_t, B_s) = \min\{s,t\}$, $\forall\, s,t \geqslant 0$.

Ex. 2 Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un Mouvement Brownien. Montrer que

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}\right)_{t\geqslant 0}$, $c > 0$,

(b) $\left(B_{t+c} - B_c\right)_{t\geqslant 0}$, $c > 0$,

(c) $\left(tB_{\frac{1}{t}}\right)_{t\geqslant 0}$,

(d) $\left(B_{1-t} - B_1\right)_{t\in[0,1]}$.

sont des Mouvements Browniens.

Ex. 3 Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ une filtration et $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{F}_t$- Mouvement Brownien. Montrer que

(a) $\left(B_t\right)_{t\geqslant 0}$,

(b) $\left(B_t^2 - t\right)_{t\geqslant 0}$,

(c) $\left(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}\right)_{t\geqslant 0}$,

sont des $\mathcal{F}_t$-martingales.

Ex. 4 (Principe de réflexion) Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ une filtration et $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{F}_t$- Mouvement Brownien. On définit $B_t^* := \sup_{0\leqslant s\leqslant t} B_s$.

(a) Montrer que $(B_t^*)_{t\geqslant 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

(b) Montrer que si τ un temps d'arrêt fini, alors $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geqslant 0}$ est un $\mathcal{F}_t$- Mouvement Brownien.

(c) En déduire que si $0 \leqslant b \leqslant a$ alors $\mathbb{P}\big(B_t^* \geqslant a, B_t < b\big) = \mathbb{P}\big(B_t \geqslant 2a - b\big)$.

(d) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$, $|B_t|$ et B_t^* ont la même loi.

Ex. 5 Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un Mouvement Brownien tel que $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue $\forall\, \omega \in \Omega$. Montrer que pour tout $t > 0$, $X_t := \int_0^t B_s \mathrm{d}s$ est une variable aléatoire Gaussienne et en calculer l'espérance et la variance. Le processus$(X_t)_{t\geqslant 0}$ est-il une Martingale par rapport à $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s \colon s \leqslant t)$?

Ex. 6 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite IID de variables exponentielles de paramètre $\lambda > 0$. Soit $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Pour chaque $t \in [0, \infty)$ on définit

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leqslant t\}}.$$

Montrer que

(a) le processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ a incréments indépendants.

(b) pour tout $t > 0$ fixés, N_t suit une loi de Poisson.

(c) $N_t - \lambda t$ est une martingale.