TD 3 : L'INTÉGRALE STOCHASTIQUE ET LA FORMULE D'ITÔ

Ex. 1 Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un Mouvement Brownien définit sur l'espace de probabilité $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère les processus $X = (X_t)_{t\geqslant 0}, Y = (Y_t)_{t\geqslant 0}$ où $X_t := \cos(B_t)$ et $Y_t := \sin(B_t)$.

— Montrer que X, Y satisfont

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = -Y_t \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}X_t \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}Y_t = X_t \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}Y_t \mathrm{d}t \\ X_0 = 1, \quad Y_0 = 0. \end{cases}$$

— En déduire que le processus $M_t = X_t + \frac{1}{2}\int_0^t X_s \mathrm{d}s$ est une martingale.

— Calculer $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathbb{E}(Y_t)$.

— On pose $Z_t := e^{iB_t} = X_t + iY_t$. En déduire que le processus Z satisfait

$$\mathrm{d}Z_t = iZ_t \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}Z_t \mathrm{d}t.$$

Ex. 2 (Intégrale de Wiener) Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un Mouvement Brownien définit sur l'espace de probabilité $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Soit $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, c'est-à-dire $f(x) = \sum_{i=1}^k c_i 1_{[t_{i-1}, t_i)}(x)$, où $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$. On définit

$$I(f) = \int_0^\infty f(u)\mathrm{d}B_u := \sum_{i=1}^k c_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Montrer que (i) $I(f) \sim \mathcal{N}\big(0, \int_0^\infty |f(x)|^2 \mathrm{d}x\big)$ et que $I(f+h) = I(f) + I(h)$ pour tout f, h fonctions en escalier, (ii) $\|I(f)\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2}$ pour tout f fonctions en escalier.

(b) En déduire que pour tout $g \in L^2([0, \infty))$ l'intégrale stochastique

$$I(g) = \int_0^\infty g(u)\mathrm{d}B_u$$

est bien défini et $I(g) \sim \mathcal{N}\big(0, \int_0^\infty |g(x)|^2 \mathrm{d}x\big)$ et que $I(f+h) = I(f) + I(h)$ pour tout $f, h \in L^2([0, \infty))$.

Ex. 3 (Processus de Ornstein-Uhlenbeck) Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un Mouvement Brownien. On définit

$$V_t := e^{-bt}\Big(v_0 + \sigma \int_0^t e^{bu}\mathrm{d}B_t\Big),$$

où $b, \sigma \in \mathbb{R}_+$ et $v_0 \in \mathbb{R}$.

— Montrer que $V = (V_t)_{t\geqslant 0}$ est un Processus d'Itô.

— Monter que V est solution de l'équation différentielle suivante (EDS)

$$\begin{cases} \mathrm{d}V_t = \sigma\, \mathrm{d}B_t - b\, V_t \mathrm{d}t, \\ V_0 = v_0. \end{cases}$$

— Calculer la limite (en loi) $\lim_{t\to\infty} V_t$.

Ex. 4 Soit $\varphi = (\varphi_t)_{t\in[0,T]} \in M^2_{\text{loc}}[0, T]$. On pose

$$Z_t := \exp\Big(\int_0^t \varphi_u \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_u^2 \mathrm{d}u\Big).$$

— Montrer que
$$\mathrm{d}Z_t = Z_t \varphi_t \mathrm{d}B_t$$
et en déduire que $Z := (Z_t)_{t \geqslant 0}$ est une martingale locale.

— Montrer que si M est une martingale locale telle que $M_t \geqslant 0$ p.s., alors M est une sur-martingale. En déduire que Z est une sur-martingale.

— Montrer que si $\mathbb{E}(Z_T) = 1$, alors le processus Z est une martingale.